マルチボディダイナミクス「粘性動吸振器の最適設計」

レポート例

［勉強は自分の力をつけるためにするものであるから、印刷などせず内容を理解せよ］

課題１：粘性動吸振器における固有円振動数と減衰比を最適設計せよ

ニュートンの運動に関する第２法則を用いて運動方程式を導くと次のようになる。

［ここに自由体線図を描く］

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 = -k_1x_1 + k_2(x_2 - x_1) + c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + F_0\cos\omega t \\ m_2\ddot{x}_2 = -k_2(x_2 - x_1) - c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + c_2\dot{x}_1 - c_2\dot{x}_2 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2x_2 = F_0\cos\omega t \\ m_2\ddot{x}_2 - c_2\dot{x}_1 + c_2\dot{x}_2 - k_2x_1 + k_2x_2 = 0 \end{cases} \tag{1}$$

これをマトリックス・ベクトル表示で整理すると次式となる。

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_0\cos\omega t \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{2}$$

上式の特解を求めるため、外力と応答を複素指数関数で次のように仮定する。

$$\begin{cases} F_0\cos\omega t = \mathrm{Re}\left[F_0 e^{j\omega t}\right] \\ x_1 = \mathrm{Re}\left[\overline{X}_1 e^{j\omega t}\right] \\ x_2 = \mathrm{Re}\left[\overline{X}_2 e^{j\omega t}\right] \end{cases} \tag{3}$$

ここで、$\overline{X}_1, \overline{X}_2$ は複素振幅である。式（３）を式（２）に代入し、$e^{j\omega t}$ を消去すると、

$$\begin{bmatrix} k_1 + k_2 - m_1\omega^2 + jc_2\omega & -k_2 - jc_2\omega \\ -k_2 - jc_2\omega & k_2 - m_2\omega^2 + jc_2\omega \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \overline{X}_1 \\ \overline{X}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{4}$$

となり、$\overline{X}_1, \overline{X}_2$ は次のように得られる。

$$\begin{aligned} \overline{X}_1 &= \frac{k_2 - m_2\omega^2 + jc_2\omega}{\Delta}F_0 \\ \overline{X}_2 &= \frac{k_2 + jc_2\omega}{\Delta}F_0 \end{aligned} \tag{5}$$

ただし、

$$\begin{aligned} \Delta &= (k_1 + k_2 - m_1\omega^2 + jc_2\omega)(k_2 - m_2\omega^2 + jc_2\omega) - (-k_2 - jc_2\omega)^2 \\ &= \left\{m_1m_2\omega^4 - (m_1k_2 + m_2k_1 + m_2k_2)\omega^2 + k_1k_2\right\} + i\left\{-(m_1 + m_2)\omega^2 + k_1\right\}c_2\omega \end{aligned}$$

である。したがって、質点 m_1 に関する振幅倍率は $x_{st} = F_0 / k_1$ とすると次のようになる。

$$
\begin{aligned}
R_1 &= \frac{\left|\overline{X}_1\right|}{x_{st}} \\
&= k_1\left[\frac{\left(k_2 - m_2\omega^2\right)^2 + \left(c_2\omega\right)^2}{\left\{m_1m_2\omega^4 - \left(m_1k_2 + m_2k_1 + m_2k_2\right)\omega^2 + k_1k_2\right\}^2 + \left(c_2\omega\right)^2\left\{-\left(m_1 + m_2\right)\omega^2 + k_1\right\}^2}\right]^{\frac{1}{2}} \\
&= k_1\left[\frac{\left(k_2 - m_2\omega^2\right)^2 + \left(c_2\omega\right)^2}{\left\{\left(m_1\omega^2 - k_1\right)\left(m_2\omega^2 - k_2\right) - m_2k_2\omega^2\right\}^2 + \left(c_2\omega\right)^2\left\{k_1 - \left(m_1 + m_2\right)\omega^2\right\}^2}\right]^{\frac{1}{2}} \\
&= \left[\frac{\left(\nu^2 - \lambda^2\right)^2 + \left(2\varsigma\lambda\right)^2}{\left\{\left(1 - \lambda^2\right)\left(\nu^2 - \lambda^2\right) - \mu\nu^2\lambda^2\right\}^2 + \left(2\varsigma\lambda\right)^2\left\{1 - \left(1 + \mu\right)\lambda^2\right\}^2}\right]^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
\qquad (6)
$$

ここで、

$$
\mu = \frac{m_2}{m_1}, \quad \nu = \frac{\omega_{02}}{\omega_{01}}, \quad \lambda = \frac{\omega}{\omega_{01}}, \quad \omega_{01} = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}, \quad \omega_{02} = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}}, \quad \varsigma = \frac{c_2}{2m_2\omega_{01}}
$$

である。

なお、この伝達関数は減衰比ςに関わりなく不動点 P、Q を有し、減衰比が$\varsigma = 0$の場合は、

$$
R_1\Big|_{\varsigma=0} = \left|\frac{\nu^2 - \lambda^2}{\left(1 - \lambda^2\right)\left(\nu^2 - \lambda^2\right) - \mu\nu^2\lambda^2}\right|
$$

となり、減衰比が$\varsigma = \infty$の場合は、

$$
R_1\Big|_{\varsigma=\infty} = \left|\frac{1}{1 - \left(1 + \mu\right)\lambda^2}\right|
$$

となる。

粘性動吸振器の目的である広い周波数領域で適当な吸振効果を得るため、次の２つの条件を満たすよう粘性動吸振器のパラメータを設計する。

1）不動点 P、Q において振幅倍率を等しくする。

2）不動点 P、Q において振幅倍率を極大にする。

不動点 P、Q を求めるため、$\varsigma = 0$と$\varsigma = \infty$における振幅倍率を、位相による符号の変化を考慮して等号で結ぶと、

$$
\frac{\nu^2 - \lambda^2}{\left(1 - \lambda^2\right)\left(\nu^2 - \lambda^2\right) - \mu\nu^2\lambda^2} = -\frac{1}{1 - \left(1 + \mu\right)\lambda^2} \qquad (7)
$$

となり、次式より不動点λ_P, λ_Qが求められる。

$$
\left(2 + \mu\right)\lambda^4 - 2\left(1 + \nu^2 + \mu\nu^2\right)\lambda^2 + 2\nu^2 = 0 \qquad (8)
$$

条件1）を満足させるため、不動点 P、Q にける$\varsigma = \infty$での振幅倍率を等しくおく。

$$\frac{1}{1-(1+\mu)\lambda_P^2}=-\frac{1}{1-(1+\mu)\lambda_Q^2} \tag{9}$$

式（９）を整理すると、

$$(1+\mu)(\lambda_P^2+\lambda_Q^2)=2$$

となり、２次方程式における根の和が

$$\lambda^2{}_P+\lambda^2{}_Q=\frac{2(1+\nu^2+\mu\nu^2)}{2+\mu} \tag{10}$$

となることに注意すれば、

$$\frac{2}{1+\mu}=\frac{2(1+\nu^2+\mu\nu^2)}{2+\mu}$$

となり、最適パラメータ（非連成固有円振動数比）が次のように得られる。

$$\nu_{opt}=\frac{1}{1+\mu} \tag{11}$$

このとき、不動点P、Qは次のようになる。

$$\begin{cases}\lambda_P^2,\lambda_Q^2=\dfrac{1}{1+\mu}\left(1\mp\sqrt{\dfrac{\mu}{2+\mu}}\right)\\ R_1\Big|_{\lambda=\lambda_P,\lambda_Q}=\sqrt{\dfrac{2+\mu}{\mu}}\end{cases} \tag{12}$$

次に、条件２）を満足するために次の極値計算をする。

$$\left.\frac{\partial(R_1^2)}{\partial(\lambda^2)}\right|_{\lambda^2=\lambda_P^2}=0$$

この計算を実施する前に２つの準備をしておく。

準備１）式（７）より次の関係が得られる。

$$(1-\lambda_P^2)(\nu^2-\lambda_P^2)-\mu\nu^2\lambda_P^2=-\{1-(1+\mu)\lambda_P^2\}(\nu^2-\lambda_P^2) \tag{13}$$

準備２）極値計算の式は次のように整理できる。

$$\begin{aligned}&\left.\frac{\partial}{\partial\lambda^2}\left(\frac{g(\lambda^2)}{f(\lambda^2)}\right)\right|_{\lambda^2=\lambda_P^2}=0\\ &\left.\frac{\partial g(\lambda^2)}{\partial\lambda^2}\right|_{\lambda^2=\lambda_P^2}\cdot f(\lambda_P^2)-g(\lambda_P^2)\cdot\left.\frac{\partial f(\lambda^2)}{\partial\lambda^2}\right|_{\lambda^2=\lambda_P^2}=0\\ &\frac{g(\lambda_P^2)}{f(\lambda_P^2)}\cdot\left.\frac{\partial f(\lambda^2)}{\partial\lambda^2}\right|_{\lambda^2=\lambda_P^2}=\left.\frac{\partial g(\lambda^2)}{\partial\lambda^2}\right|_{\lambda^2=\lambda_P^2}\end{aligned} \tag{14}$$

したがって、式（14）より次式が得られる。

$$\frac{2+\mu}{\mu}\left[2\left\{\left(1-\lambda^2\right)\left(\nu^2-\lambda^2\right)-\mu\nu^2\lambda^2\right\}\left\{-\left(1+\nu^2\right)+2\lambda^2-\mu\nu^2\right\}+4\zeta^2\left\{1-(1+\mu)\lambda^2\right\}\left\{1-3(1+\mu)\lambda^2\right\}\right]_{\lambda^2=\lambda_P^2}$$
$$=-2\left(\nu^2-\lambda^2\right)+4\varsigma^2\Big|_{\lambda^2=\lambda_P^2}$$

ここで、式（13）の関係を用い、ς^2について解くと次のようになる。

$$\zeta^2=\frac{\left(\nu^2-\lambda^2\right)}{2}\cdot\frac{1+\dfrac{2+\mu}{\mu}\left\{1-(1+\mu)\lambda^2\right\}\left\{1+(1+\mu)\nu^2-2\lambda^2\right\}}{1-\dfrac{2+\mu}{\mu}\left\{1-(1+\mu)\lambda^2\right\}\left\{1-3(1+\mu)\lambda^2\right\}}\Bigg|_{\lambda^2=\lambda_P^2}$$

この式に式（11）のν_{opt}と式（12）のλ_P^2を代入し、$\sqrt{\dfrac{\mu}{2+\mu}}=A$　とおいて整理すると、

$$\varsigma_P^2=\frac{\left\{1-(1+\mu)(1-A)\right\}}{2(1+\mu)^2}\cdot\frac{1+\dfrac{1}{A^2}A\left\{\dfrac{\mu+2A}{1+\mu}\right\}}{1-\dfrac{1}{A^2}A(3A-2)}$$

［<u>ここに途中式を２行以上書く</u>］

$$\varsigma_P^2=\frac{(1+\mu)(3+\mu)\dfrac{\mu}{2+\mu}-\mu^2-2\mu A}{4(1+\mu)^3(1-A)}\qquad\left(A^2=\frac{\mu}{2+\mu}\text{を代入}\right)$$

［<u>ここに途中式を２行以上書く</u>］

$$\varsigma_P^2=\frac{\mu}{4(1+\mu)^3}\cdot\frac{\left(\dfrac{3+2\mu}{2+\mu}-2A\right)(1+A)}{(1-A)(1+A)}\qquad\text{（分母分子に}(1+A)\text{を掛ける）}$$

［<u>ここに途中式を２行以上書く</u>］

$$\varsigma_P^2=\frac{\mu}{8(1+\mu)^3}(3-A)$$

$$\varsigma_P^2=\frac{\mu}{8(1+\mu)^3}\left(3-\sqrt{\frac{\mu}{2+\mu}}\right)\tag{15}$$

となる。同様な計算すれば

$$\varsigma_Q^2 = \frac{\mu}{8(1+\mu)^3}\left(3+\sqrt{\frac{\mu}{2+\mu}}\right) \tag{16}$$

が求まる。

以上の結果より、不動点 P、Q において振幅倍率が同時に極大にならないことがわかる。

そこで、両者の平均値を最適減衰とする。

$$\varsigma_{opt} = \sqrt{\frac{3\mu}{8(1+\mu)^3}} \tag{17}$$

課題２：最適設計された粘性動吸振器に関する振幅倍率のグラフを描け

（参考のために、減衰比が $\varsigma = 0$，$\varsigma = \infty$ の場合の振幅倍率も併せて描くこと）

ただし、$m_1 = 10\mathrm{kg}$、$m_2 = 1\mathrm{kg}$、$k_1 = 10\mathrm{N/m}$、$F_0 = 10\mathrm{N}$ とする。

［ここで使用したパラメータの説明をする］

［ここに計算させた式またはプログラムを載せる］

振幅倍率のグラフの例（注意：異なるパラメータを使用している）を図２に示す。

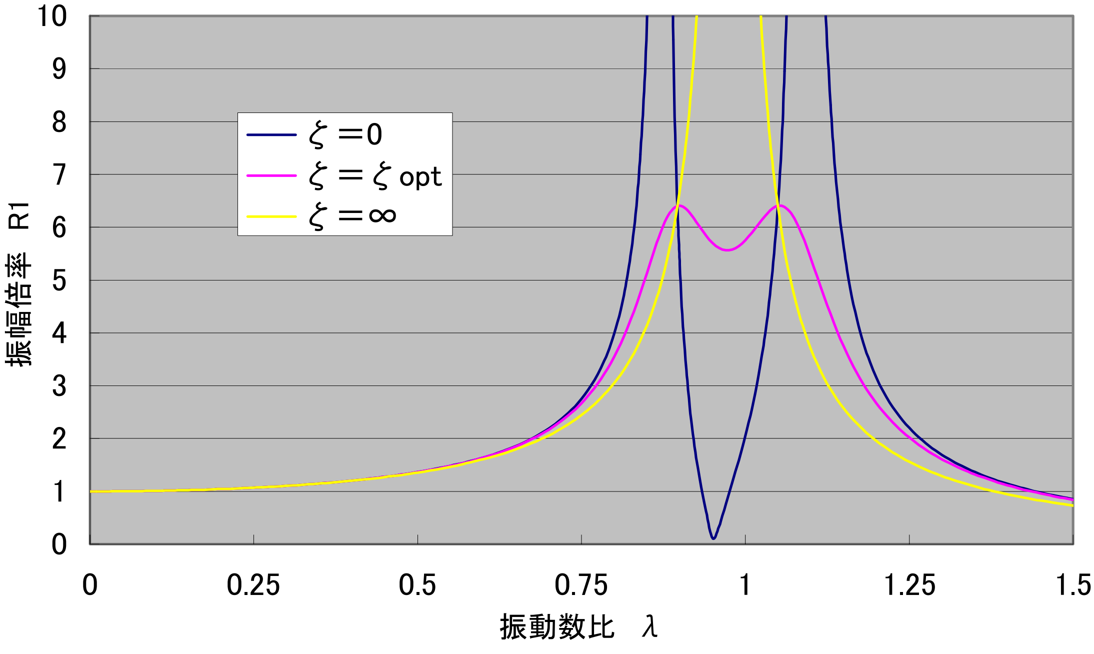

図2　粘性動吸振器の振幅倍率

課題３：考　察

［不動点が２つあり、その振幅倍率が同じであることを確認せよ］

［$\varsigma = 0$ の場合の動吸振器に比べて粘性動吸振器にはどのような特徴があるか考察せよ］